Software Engineering in der Praxis

Praktische Übungen

Petri-Netze

David Föhrweiser Marc Spisländer

Lehrstuhl für Software Engineering
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Petri-Netze

Petri-Netze erlauben es, sowohl

- die Kooperation nebenläufiger Prozesse als auch
- die Konkurrenz paralleler Prozesse um gemeinsame Ressourcen

darzustellen.

Petri-Netze

Die formale Notation erlaubt automatische

- Simulation
- Analyse

des erstellten Modells. Sie wird häufig industriell eingesetzt.

Petri-Netz

Definition (Petri-Netz)

Ein Petri-Netz ist ein (gerichteter bipartiter) Graph aus:

1. $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, n \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Plätzen
2. $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}, m \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Transitionen, es gilt $P \cap T = \emptyset$ und $P \cup T \neq \emptyset$
3. $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ Flussrelation (Kanten des Graphen)
4. $W : F \rightarrow \mathbf{N}$ Kantengewichte
5. $K : P \rightarrow \mathbf{N}^+ \cup \infty$ Stellenkapazitäten
6. $M : P \rightarrow \mathbf{N}$ die aktuelle Markierung des Petri-Netzes; Anfangsmarkierung $M_0 : P \rightarrow \mathbf{N}$ mit $M_0(p) \leq K(p)$ für alle p.

Petri-Netz

Definition (Petri-Netz)

Ein Petri-Netz ist ein (gerichteter bipartiter) Graph aus:

1. $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, n \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Plätzen
2. $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}, m \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Transitionen, es gilt $P \cap T = \emptyset$ und $P \cup T \neq \emptyset$
3. $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ Flussrelation (Kanten des Graphen)
4. $W : F \to \mathbf{N}$ Kantengewichte
5. $K : P \to \mathbf{N}^+ \cup \infty$ Stellenkapazitäten
6. $M : P \to \mathbf{N}$ die aktuelle Markierung des Petri-Netzes; Anfangsmarkierung $M_0 : P \to \mathbf{N}$ mit $M_0(p) \leq K(p)$ für alle p.

Petri-Netz

Definition (Petri-Netz)

Ein Petri-Netz ist ein (gerichteter bipartiter) Graph aus:

1. $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, n \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Plätzen
2. $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}, m \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Transitionen, es gilt $P \cap T = \emptyset$ und $P \cup T \neq \emptyset$
3. $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ Flussrelation (Kanten des Graphen)
4. $W : F \to \mathbf{N}$ Kantengewichte
5. $K : P \to \mathbf{N}^+ \cup \infty$ Stellenkapazitäten
6. $M : P \to \mathbf{N}$ die aktuelle Markierung des Petri-Netzes; Anfangsmarkierung $M_0 : P \to \mathbf{N}$ mit $M_0(p) \leq K(p)$ für alle p.

Petri-Netz

Definition (Petri-Netz)

Ein Petri-Netz ist ein (gerichteter bipartiter) Graph aus:

1. $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, n \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Plätzen
2. $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}, m \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Transitionen, es gilt $P \cap T = \emptyset$ und $P \cup T \neq \emptyset$
3. $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ Flussrelation (Kanten des Graphen)
4. $W : F \to \mathbf{N}$ Kantengewichte
5. $K : P \to \mathbf{N}^+ \cup \infty$ Stellenkapazitäten
6. $M : P \to \mathbf{N}$ die aktuelle Markierung des Petri-Netzes; Anfangsmarkierung $M_0 : P \to \mathbf{N}$ mit $M_0(p) \leq K(p)$ für alle p.

Petri-Netz

Definition (Petri-Netz)

Ein Petri-Netz ist ein (gerichteter bipartiter) Graph aus:

1. $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, n \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Plätzen
2. $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}, m \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Transitionen, es gilt $P \cap T = \emptyset$ und $P \cup T \neq \emptyset$
3. $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ Flussrelation (Kanten des Graphen)
4. $W : F \to \mathbf{N}$ Kantengewichte
5. $K : P \to \mathbf{N}^+ \cup \infty$ Stellenkapazitäten
6. $M : P \to \mathbf{N}$ die aktuelle Markierung des Petri-Netzes; Anfangsmarkierung $M_0 : P \to \mathbf{N}$ mit $M_0(p) \leq K(p)$ für alle p.

Petri-Netz

Definition (Petri-Netz)

Ein Petri-Netz ist ein (gerichteter bipartiter) Graph aus:

1. $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, n \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Plätzen
2. $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}, m \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Transitionen, es gilt $P \cap T = \emptyset$ und $P \cup T \neq \emptyset$
3. $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ Flussrelation (Kanten des Graphen)
4. $W : F \to \mathbf{N}$ Kantengewichte
5. $K : P \to \mathbf{N}^+ \cup \infty$ Stellenkapazitäten
6. $M : P \to \mathbf{N}$ die aktuelle Markierung des Petri-Netzes; Anfangsmarkierung $M_0 : P \to \mathbf{N}$ mit $M_0(p) \leq K(p)$ für alle p.

Petri-Netz

Definition (Petri-Netz)

Ein Petri-Netz ist ein (gerichteter bipartiter) Graph aus:

1. $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}, n \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Plätzen
2. $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}, m \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Transitionen, es gilt $P \cap T = \emptyset$ und $P \cup T \neq \emptyset$
3. $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ Flussrelation (Kanten des Graphen)
4. $W : F \to \mathbf{N}$ Kantengewichte
5. $K : P \to \mathbf{N}^+ \cup \infty$ Stellenkapazitäten
6. $M : P \to \mathbf{N}$ die aktuelle Markierung des Petri-Netzes; Anfangsmarkierung $M_0 : P \to \mathbf{N}$ mit $M_0(p) \leq K(p)$ für alle p.

Erweiterte Definitionen von Petri-Netzen

Häufig vorzufindende Erweiterungen

- Erlaubnis von Mehrfachkanten
- Inhibierende Kanten (schalten, wenn *kein* Token anliegt)
- Farben (unterscheidbare Tokens)
- Wahrscheinlichkeiten
- Zeitverhalten

Hilfsfunktionen

Ein- und Ausgabeplätze einer Transition aus T werden mit

- $I : T \to 2^P$ für die Menge der Eingabeplätze (*Vorbereich* der Transition) und
- $O : T \to 2^P$ für die Menge der Ausgabeplätze (*Nachbereich* der Transition)

referenziert.

Aktivierungsbedingung

Definition (Schaltbereitschaft)

Eine Transition $t \in T$ eines Petri-Netzes heißt unter der Markierung M *schaltbereit*, geschrieben $M[t\rangle$, wenn:

$$\begin{array}{rll} \text{a)} & \forall p \in I(t) \setminus O(t): & M(p) \geq W(p,t) \\ \text{b)} & \forall p \in O(t) \setminus I(t): & M(p) \leq K(p) - W(t,p) \\ \text{c)} & \forall p \in I(t) \cap O(t): & W(p,t) \leq M(p) \leq K(p) - W(t,p) + W(p,t) \end{array}$$

Aktivierungsbedingung für die *starke Schaltregel* (schleifentolerante Version), die Stellenkapazitäten berücksichtigt.

Schaltregel

Durch das Schalten der Transition t ergibt sich die neue Markierung M', geschrieben $M[t\rangle M'$, nach der Schaltregel

$$
\begin{array}{lll}
\text{a)} & \forall p \in I(t) \setminus O(t): & M'(p) = M(p) - W(p,t) \\
\text{b)} & \forall p \in O(t) \setminus I(t): & M'(p) = M(p) + W(t,p) \\
\text{c)} & \forall p \in I(t) \cap O(t): & M'(p) = M(p) - W(p,t) + W(t,p) \\
\text{d)} & \text{sonst}: & M'(p) = M(p)
\end{array}
$$

Die Schaltregel verleiht Petri-Netzen ihre Dynamik.

Schaltregel

Durch das Schalten der Transition t ergibt sich die neue Markierung M', geschrieben $M[t\rangle M'$, nach der Schaltregel

$$
\begin{array}{lll}
\text{a)} & \forall p \in I(t) \setminus O(t): & M'(p) = M(p) - W(p,t) \\
\text{b)} & \forall p \in O(t) \setminus I(t): & M'(p) = M(p) + W(t,p) \\
\text{c)} & \forall p \in I(t) \cap O(t): & M'(p) = M(p) - W(p,t) + W(t,p) \\
\text{d)} & \text{sonst}: & M'(p) = M(p)
\end{array}
$$

Die Schaltregel verleiht Petri-Netzen ihre Dynamik.

Dynamik von Petri-Netzen

Durch die Schaltregel ergeben sich die Begriffe der

- *Erreichbarkeitsmenge* $[M_0\rangle$ als Menge aller Folgemarkierungen und der
- *Erreichbarkeit* einer Markierung M

eines Petri-Netzes unter der Anfangsmarkierung M_0

Dynamik von Petri-Netzen

Durch die Schaltregel ergeben sich die Begriffe der

- *Erreichbarkeitsmenge* $[M_0\rangle$ als Menge aller Folgemarkierungen und der
- *Erreichbarkeit* einer Markierung M

eines Petri-Netzes unter der Anfangsmarkierung M_0

Beschränktheit und Sicherheit

Beschränktheit Ein Petri-Netz heißt

- *beschränkt*, wenn die Zahl der Token im Netz in keiner Stelle eine feste obere Schranke überschreitet.
  formal: $\forall p \in P \, \exists b \in \mathbf{N} : \forall M \in [M_0\rangle : M(p) \leq b(p)$
- b*-beschränkt* wenn an keiner Stelle die Zahl der Marken die obere Schranke $b \in \mathbf{N}$ überschreitet.
  formal: $\exists b \in \mathbf{N} : \forall M \in [M_0\rangle \forall p \in P : M(p) \leq b$
- *sicher*, wenn es 1-beschränkt ist.

Bemerkung: Ein Petri-Netz ist beschränkt genau dann, wenn seine Erreichbarkeitsmenge endlich ist.

Beschränktheit und Sicherheit

Beschränktheit Ein Petri-Netz heißt

- *beschränkt*, wenn die Zahl der Token im Netz in keiner Stelle eine feste obere Schranke überschreitet.
  formal: $\forall p \in P \, \exists b \in \mathbf{N} : \forall M \in [M_0\rangle : M(p) \leq b(p)$
- b-*beschränkt* wenn an keiner Stelle die Zahl der Marken die obere Schranke $b \in \mathbf{N}$ überschreitet.
  formal: $\exists b \in \mathbf{N} : \forall M \in [M_0\rangle \forall p \in P : M(p) \leq b$
- *sicher*, wenn es 1-beschränkt ist.

Bemerkung: Ein Petri-Netz ist beschränkt genau dann, wenn seine Erreichbarkeitsmenge endlich ist.

Beschränktheit und Sicherheit

Beschränktheit Ein Petri-Netz heißt

- *beschränkt*, wenn die Zahl der Token im Netz in keiner Stelle eine feste obere Schranke überschreitet.
  formal: $\forall p \in P \, \exists b \in \mathbf{N} : \forall M \in [M_0\rangle : M(p) \leq b(p)$
- b*-beschränkt* wenn an keiner Stelle die Zahl der Marken die obere Schranke $b \in \mathbf{N}$ überschreitet.
  formal: $\exists b \in \mathbf{N} : \forall M \in [M_0\rangle \forall p \in P : M(p) \leq b$
- *sicher*, wenn es 1-beschränkt ist.

Bemerkung: Ein Petri-Netz ist beschränkt genau dann, wenn seine Erreichbarkeitsmenge endlich ist.

Beschränktheit und Sicherheit

Beschränktheit Ein Petri-Netz heißt

- *beschränkt*, wenn die Zahl der Token im Netz in keiner Stelle eine feste obere Schranke überschreitet.
  formal: $\forall p \in P \, \exists b \in \mathbf{N} : \forall M \in [M_0\rangle : M(p) \leq b(p)$
- b*-beschränkt* wenn an keiner Stelle die Zahl der Marken die obere Schranke $b \in \mathbf{N}$ überschreitet.
  formal: $\exists b \in \mathbf{N} : \forall M \in [M_0\rangle \forall p \in P : M(p) \leq b$
- *sicher*, wenn es 1-beschränkt ist.

Bemerkung: Ein Petri-Netz ist beschränkt genau dann, wenn seine Erreichbarkeitsmenge endlich ist.

Aktivierbarkeit und Lebendigkeit

Für eine Markierung M heißt eine Transition t

- *tot*, wenn sie unter keiner Folgemarkierung schaltbereit ist:

$$\forall M_i \in [M\rangle : \neg M_i[t\rangle$$

- *aktivierbar*, wenn sie unter mindestens einer Folgemarkierung schaltbereit ist:

$$\exists M_i \in [M\rangle : M_i[t\rangle$$

- *lebendig*, wenn sie unter allen Folgemarkierungen aktivierbar ist:

$$\forall M_i \in [M\rangle : \exists M_k \in [M_i\rangle : M_k[t\rangle$$

Aktivierbarkeit und Lebendigkeit

Für eine Markierung M heißt eine Transition t

- *tot*, wenn sie unter keiner Folgemarkierung schaltbereit ist:

$$\forall M_i \in [M\rangle : \neg M_i[t\rangle$$

- *aktivierbar*, wenn sie unter mindestens einer Folgemarkierung schaltbereit ist:

$$\exists M_i \in [M\rangle : M_i[t\rangle$$

- *lebendig*, wenn sie unter allen Folgemarkierungen aktivierbar ist:

$$\forall M_i \in [M\rangle : \exists M_k \in [M_i\rangle : M_k[t\rangle$$

Aktivierbarkeit und Lebendigkeit

Für eine Markierung M heißt eine Transition t

- *tot*, wenn sie unter keiner Folgemarkierung schaltbereit ist:

$$\forall M_i \in [M\rangle : \neg M_i[t\rangle$$

- *aktivierbar*, wenn sie unter mindestens einer Folgemarkierung schaltbereit ist:

$$\exists M_i \in [M\rangle : M_i[t\rangle$$

- *lebendig*, wenn sie unter allen Folgemarkierungen aktivierbar ist:

$$\forall M_i \in [M\rangle : \exists M_k \in [M_i\rangle : M_k[t\rangle$$

Verklemmungen von Netzen

Für eine Markierung M heißt ein Petri-Netz

- *tot*, wenn keine Transition schaltbereit ist:

$$\forall t \in T : \neg M[t\rangle$$

- *schwach lebendig*, wenn unter jeder Folgemarkierung mindestens eine Transition schaltbereit ist:

$$\forall M_i \in [M\rangle : \exists t \in T : M_i[t\rangle$$

- *lebendig* oder *stark lebendig*, wenn alle seine Transitionen lebendig sind:

$$\forall t \in T\, \forall M_i \in [M\rangle : \exists M_k \in [M_i\rangle : M_k[t\rangle$$

- *partiell verklemmt*, wenn es schwach lebendig, aber nicht lebendig ist.

Verklemmungen von Netzen

Für eine Markierung M heißt ein Petri-Netz

- *tot*, wenn keine Transition schaltbereit ist:

$$\forall t \in T : \neg M[t\rangle$$

- *schwach lebendig*, wenn unter jeder Folgemarkierung mindestens eine Transition schaltbereit ist:

$$\forall M_i \in [M\rangle : \exists t \in T : M_i[t\rangle$$

- *lebendig* oder *stark lebendig*, wenn alle seine Transitionen lebendig sind:

$$\forall t \in T \, \forall M_i \in [M\rangle : \exists M_k \in [M_i\rangle : M_k[t\rangle$$

- *partiell verklemmt*, wenn es schwach lebendig, aber nicht lebendig ist.

Verklemmungen von Netzen

Für eine Markierung M heißt ein Petri-Netz

- *tot*, wenn keine Transition schaltbereit ist:

$$\forall t \in T : \neg M[t\rangle$$

- *schwach lebendig*, wenn unter jeder Folgemarkierung mindestens eine Transition schaltbereit ist:

$$\forall M_i \in [M\rangle : \exists t \in T : M_i[t\rangle$$

- *lebendig* oder *stark lebendig*, wenn alle seine Transitionen lebendig sind:

$$\forall t \in T \, \forall M_i \in [M\rangle : \exists M_k \in [M_i\rangle : M_k[t\rangle$$

- *partiell verklemmt*, wenn es schwach lebendig, aber nicht lebendig ist.

Verklemmungen von Netzen

Für eine Markierung M heißt ein Petri-Netz

- *tot*, wenn keine Transition schaltbereit ist:

$$\forall t \in T : \neg M[t\rangle$$

- *schwach lebendig*, wenn unter jeder Folgemarkierung mindestens eine Transition schaltbereit ist:

$$\forall M_i \in [M\rangle : \exists t \in T : M_i[t\rangle$$

- *lebendig* oder *stark lebendig*, wenn alle seine Transitionen lebendig sind:

$$\forall t \in T \, \forall M_i \in [M\rangle : \exists M_k \in [M_i\rangle : M_k[t\rangle$$

- *partiell verklemmt*, wenn es schwach lebendig, aber nicht lebendig ist.

Weitere Begriffe

Weitere Begriffe tauchen in Vorlesung, Literatur und z.T. der Software auf:

- Erreichbarkeitsgraph
- reversibel
- Konflikt, Kontakt
- nebenläufig aktiviert
- u.v.m. . . .

Weitere Begriffe

Weitere Begriffe tauchen in Vorlesung, Literatur und z.T. der Software auf:

- Erreichbarkeitsgraph
- reversibel
- Konflikt, Kontakt
- nebenläufig aktiviert
- u.v.m. . . .

Weitere Begriffe

Weitere Begriffe tauchen in Vorlesung, Literatur und z.T. der Software auf:

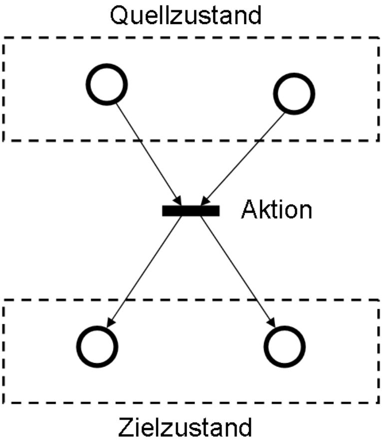
- Erreichbarkeitsgraph
- reversibel
- Konflikt, Kontakt
- nebenläufig aktiviert
- u.v.m. . . .

Weitere Begriffe

Weitere Begriffe tauchen in Vorlesung, Literatur und z.T. der Software auf:

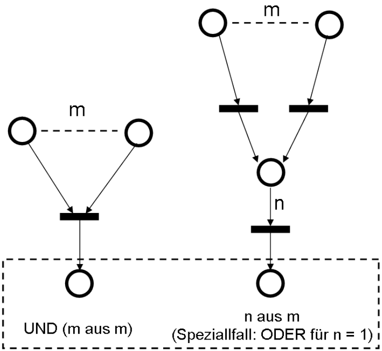
- Erreichbarkeitsgraph
- reversibel
- Konflikt, Kontakt
- nebenläufig aktiviert
- u.v.m. . . .

Modellierung mit Petri-Netzen



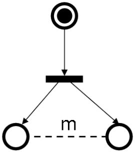
Muster: Synchronisation

Zur Beschreibung von Bedingungen, Synchronisationspunkten, Eingaben, angebotenen Schnittstellen, ...

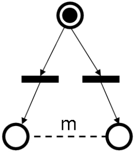


Muster: Dispatcher

Zur Beschreibung von Synchronisationspunkten, Ausgaben, genutzten Schnittstellen, . . .



Multicast (m aus m)

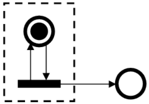


1 aus m

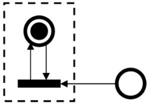
Muster: Generator und Terminator

Als Endloserzeuger und Endlosverbraucher; z.B. zur Isolation von zu simulierenden Teilnetzen

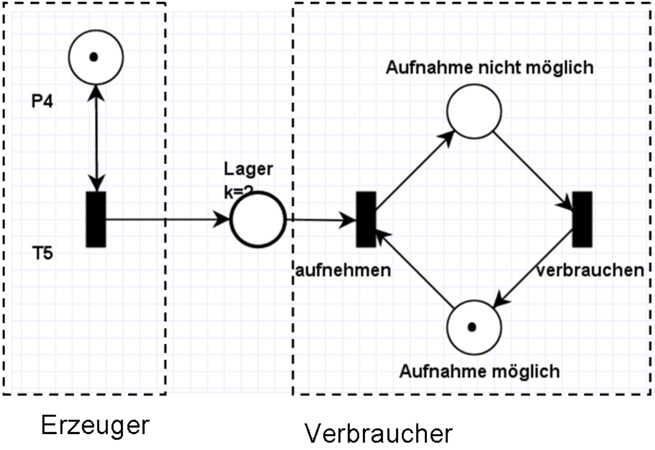
Token-Generator



Token-Terminator



Muster: Erzeuger / Verbraucher



Aufgaben

- Werkzeug: Winpetri, TINA, PIPE (Open Source)