

Petri-Netze

Yi Zhao Marc Spisländer

Lehrstuhl für Software Engineering
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Petri-Netze erlauben es, sowohl

- die Kooperation nebenläufiger Prozesse als auch
- die Konkurrenz paralleler Prozesse um gemeinsame Ressourcen darzustellen.

Die formale Notation erlaubt automatische

- Simulation
- Analyse

des erstellten Modells. Sie wird häufig industriell eingesetzt.

Definition (Petri-Netz)

Ein Petri-Netz ist ein (gerichteter bipartiter) Graph aus:

- 1 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}, n \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Plätzen
- 2 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}, m \in \mathbf{N}$ eine endliche Menge von Transitionen, es gilt $P \cap T = \emptyset$ und $P \cup T \neq \emptyset$
- 3 $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ Flussrelation (Kanten des Graphen)
- 4 $W : F \rightarrow \mathbf{N}$ Kantengewichte
- 5 $K : P \rightarrow \mathbf{N}^+ \cup \infty$ Stellenkapazitäten
- 6 $M : P \rightarrow \mathbf{N}$ die aktuelle Markierung des Petri-Netzes;
Anfangsmarkierung $M_0 : P \rightarrow \mathbf{N}$ mit $M_0(p) \leq K(p)$ für alle p .

Häufig vorzufindende Erweiterungen

- Inhibierende Kanten (schalten, wenn *kein* Token anliegt)
- Farben (unterscheidbare Tokens)
- Wahrscheinlichkeiten
- Zeitverhalten

Ein- und Ausgabeplätze einer Transition aus T werden mit

- $I : T \rightarrow 2^P$ für die Menge der Eingabeplätze (*Vorbereich* der Transition) und
- $O : T \rightarrow 2^P$ für die Menge der Ausgabeplätze (*Nachbereich* der Transition)

referenziert.

Definition (Schaltbereitschaft)

Eine Transition $t \in T$ eines Petri-Netzes heißt unter der Markierung M *schaltbereit*, geschrieben $M[t\rangle$, wenn:

- a) $\forall p \in I(t) \setminus O(t) : M(p) \geq W(p, t)$
- b) $\forall p \in O(t) \setminus I(t) : M(p) \leq K(p) - W(t, p)$
- c) $\forall p \in I(t) \cap O(t) : W(p, t) \leq M(p) \leq K(p) - W(t, p) + W(p, t)$

Aktivierungsbedingung für die *starke Schaltregel* (schleifentolerante Version), die Stellenkapazitäten berücksichtigt.

Durch das Schalten der Transition t ergibt sich die neue Markierung M' , geschrieben $M[t\rangle M'$, nach der Schaltregel

- a) $\forall p \in I(t) \setminus O(t) : M'(p) = M(p) - W(p, t)$
- b) $\forall p \in O(t) \setminus I(t) : M'(p) = M(p) + W(t, p)$
- c) $\forall p \in I(t) \cap O(t) : M'(p) = M(p) - W(p, t) + W(t, p)$
- d) sonst : $M'(p) = M(p)$

Die Schaltregel verleiht Petri-Netzen ihre Dynamik.

Durch die Schaltregel ergeben sich die Begriffe der

- *Erreichbarkeitsmenge* $[M_0\rangle$ als Menge aller Folgemarkierungen und der
- *Erreichbarkeit* einer Markierung M

eines Petri-Netzes unter der Anfangsmarkierung M_0

Ein Petri-Netz heißt

- *beschränkt*, wenn die Zahl der Token im Netz in keiner Stelle eine feste obere Schranke überschreitet.
formal: $\forall p \in P \exists b \in \mathbf{N} : \forall M \in [M_0] : M(p) \leq b(p)$
- *b-beschränkt* wenn an keiner Stelle die Zahl der Marken die obere Schranke $b \in \mathbf{N}$ überschreitet.
formal: $\exists b \in \mathbf{N} : \forall M \in [M_0] \forall p \in P : M(p) \leq b$
- *sicher*, wenn es 1-beschränkt ist.

Bemerkung: Ein Petri-Netz ist genau dann beschränkt, wenn seine Erreichbarkeitsmenge endlich ist.

Für eine Markierung M heißt eine Transition t

- *tot*, wenn sie unter keiner Folgemarkierung schaltbereit ist:

$$\forall M_i \in [M] : \neg M_i[t]$$

- *aktivierbar*, wenn sie unter mindestens einer Folgemarkierung schaltbereit ist:

$$\exists M_i \in [M] : M_i[t]$$

- *lebendig*, wenn sie unter allen Folgemarkierungen aktivierbar ist:

$$\forall M_i \in [M] : \exists M_k \in [M_i] : M_k[t]$$

Verklemmungen von Netzen

Für eine Markierung M heißt ein Petri-Netz

- *tot*, wenn keine Transition schaltbereit ist:

$$\forall t \in T : \neg M[t \rangle$$

- *schwach lebendig*, wenn unter jeder Folgemarkierung mindestens eine Transition schaltbereit ist:

$$\forall M_i \in [M \rangle : \exists t \in T : M_i[t \rangle$$

- *lebendig* oder *stark lebendig*, wenn alle seine Transitionen lebendig sind:

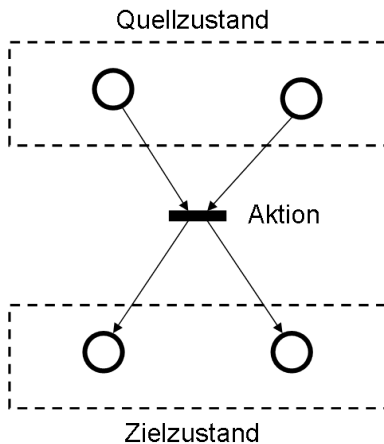
$$\forall t \in T \forall M_i \in [M \rangle : \exists M_k \in [M_i \rangle : M_k[t \rangle$$

- *partiell verklemmt*, wenn es schwach lebendig, aber nicht lebendig ist.

Weitere Begriffe tauchen in Vorlesung, Literatur und z.T. der Software auf:

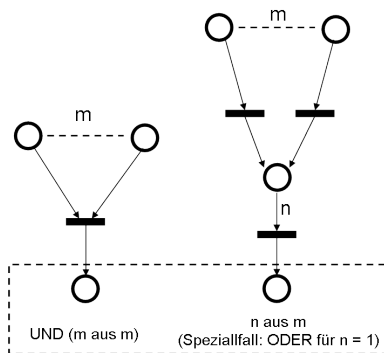
- Erreichbarkeitsgraph
- reversibel
- Konflikt
- nebenläufig aktiviert
- u.v.m. . . .

Modellierung mit Petri-Netzen



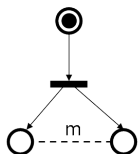
Muster: Synchronisation

Zur Beschreibung von Bedingungen, Synchronisationspunkten, Eingaben, angebotenen Schnittstellen, ...

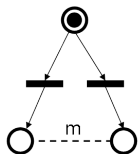


Muster: Dispatcher

Zur Beschreibung von Synchronisationspunkten, Ausgaben, genutzten Schnittstellen, ...



Multicast (m aus m)

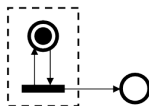


1 aus m

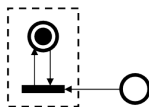
Muster: Generator und Terminator

Als Endloserzeuger und Endlosverbraucher; z.B. zur Isolation von zu simulierenden Teilnetzen

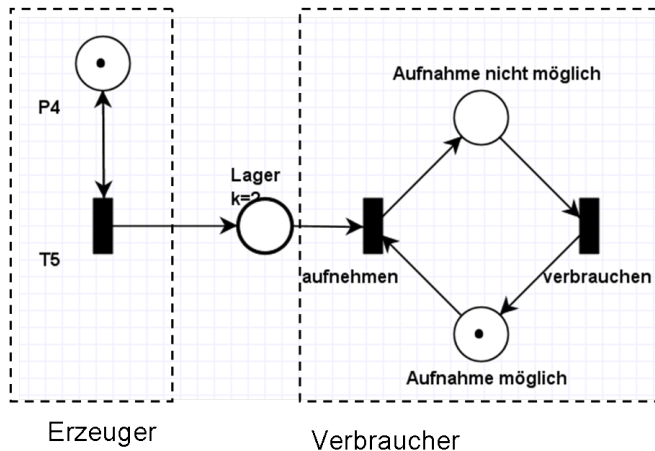
Token-Generator



Token-Terminator



Muster: Erzeuger / Verbraucher



- Werkzeuge: TINA, PIPE (Open Source)